

CHAPTER

1

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.
John T. DeWolf
David F. Mazurek

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University



Introduction – Concept of Stress

응력의 개념 소개

Contents (목차)

[Concept of Stress](#) (응력의 개념)

[Review of Statics](#) (정역학 복습)

[Structure Free-Body Diagram](#)

(구조물의 자유물체도)

[Component Free-Body Diagram](#)

(자유물체도 성분)

[Method of Joints](#) (절점법)

[Stress Analysis](#) (응력해석)

[Design](#) (설계)

[Axial Loading: Normal Stress](#) (축방향
하중 수직응력)

[Centric & Eccentric Loading](#)

(중심 및 편심하중)

[Shearing Stress](#) (전단응력)

[Shearing Stress Examples](#)

(전단응력 예제)

[Bearing Stress in Connections](#)

(연결부의 지압응력)

[Stress Analysis & Design Example](#)

(응력 해석 및 설계 예제)

[Rod & Boom Normal Stresses](#)

(봉 및 붐의 수직응력)

[Pin Shearing Stresses](#) (핀의 전단응력)

[Pin Bearing Stresses](#) (핀의 지압응력)

[Stress in Two Force Members](#) (2력부재 응력)

[Stress on an Oblique Plane](#) (경사면 응력)

[Maximum Stresses](#) (최대응력)

[Stress Under General Loadings](#)
(일반하중조건의 응력)

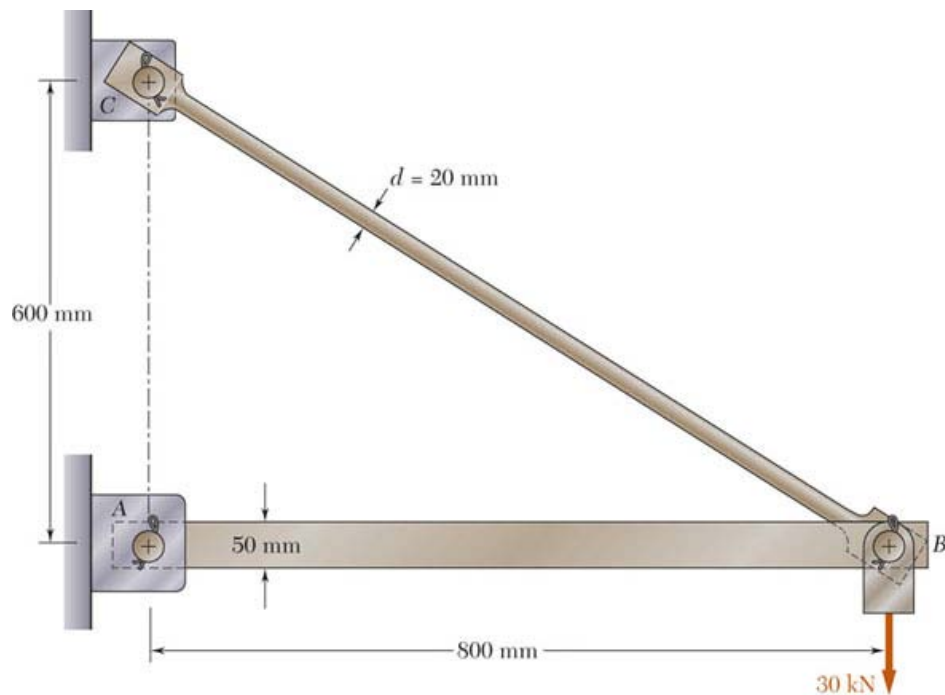
[State of Stress](#) (응력상태)

[Factor of Safety](#) (안전계수)



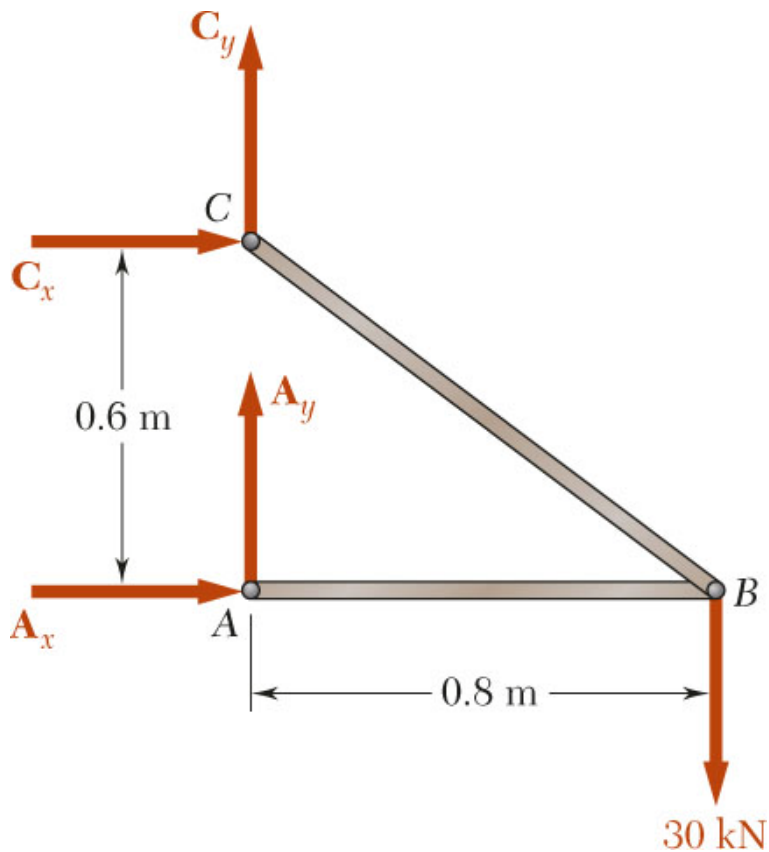
Concept of Stress (응력의 개념)

- 재료역학 학문의 주요 목적은 미래의 공학도가 하중을 받는 구조물이나 여러 종류의 기계를 해석하고 설계할 수 있는 방법을 습득
- The main objective of the study of the mechanics of materials is to provide the future engineer with the means of analyzing and designing various machines and load bearing structures.
- 주어진 구조물의 설계와 해석 시에는 응력 및 변형의 계산이 필요. 이 장에서는 응력의 개념 소개
- Both the analysis and design of a given structure involve the determination of *stresses* and *deformations*. This chapter is devoted to the concept of stress.



- 30 kN 의 하중을 지지할 수 있는 구조물 설계
- The structure is designed to support a 30 kN load
- 지지점에서 반력과 각각의 구조물 부재의 내력을 결정하기 위한 정역학 해석
- The structure consists of a boom and rod joined by pins (zero moment connections) at the junctions and supports
- 구조물은 붐과 봉으로 구성, 연결부와 지지부는 지지 (모멘트=0으로 연결)
- Perform a static analysis to determine the internal force in each structural member and the reaction forces at the supports

Structure Free-Body Diagram (구조물의 자유물체도)



- 구조물을 지지 부로부터 분리, 하중과 반력 표시

- 정적 평형조건 방정식

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 = A_x(0.6\text{ m}) - (30\text{ kN})(0.8\text{ m})$$

$$A_x = 40\text{ kN}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 = A_x + C_x$$

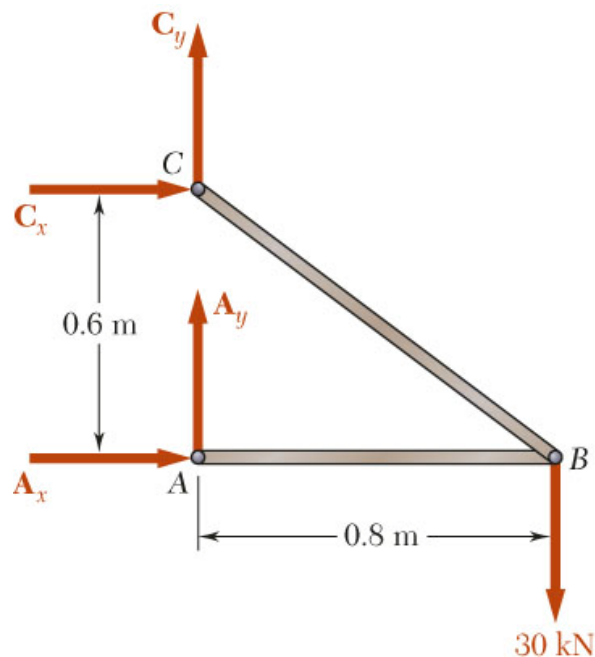
$$C_x = -A_x = -40\text{ kN}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 = A_y + C_y - 30\text{ kN} = 0$$

$$A_y + C_y = 30\text{ kN}$$

- A_y 와 C_y 는 위의 식으로부터 구할 수 없음

Component Free-Body Diagram (자유물체도 성분)



- 전체 구조물뿐만 아니라, 각각의 구성품은 정적 평형조건을 만족하여야 함

- 붐(boom)의 자유물체도 고려

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 = -A_y(0.8\text{m})$$

$$A_y = 0$$

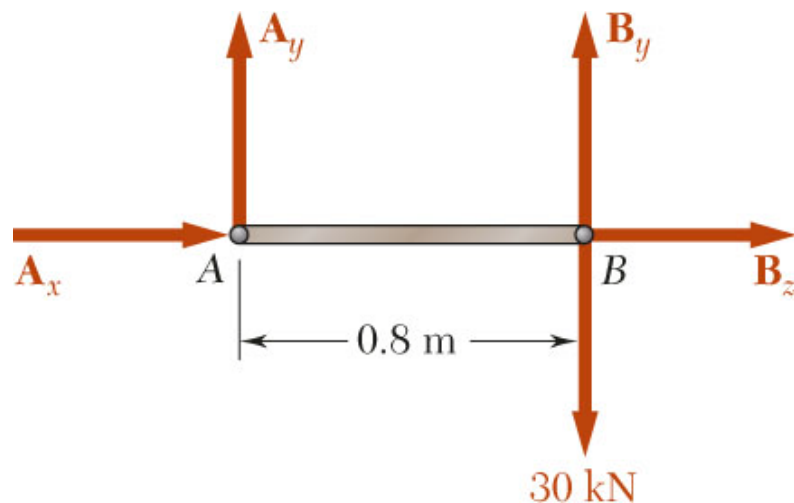
구조물의 평형방정식으로부터

$$C_y = 30\text{kN}$$

- 계산결과

$$A = 40\text{kN} \rightarrow \quad C_x = 40\text{kN} \leftarrow \quad C_y = 30\text{kN} \uparrow$$

반력 방향은 붐과 봉에 표시



Method of Joints (절점법, 조인트법)

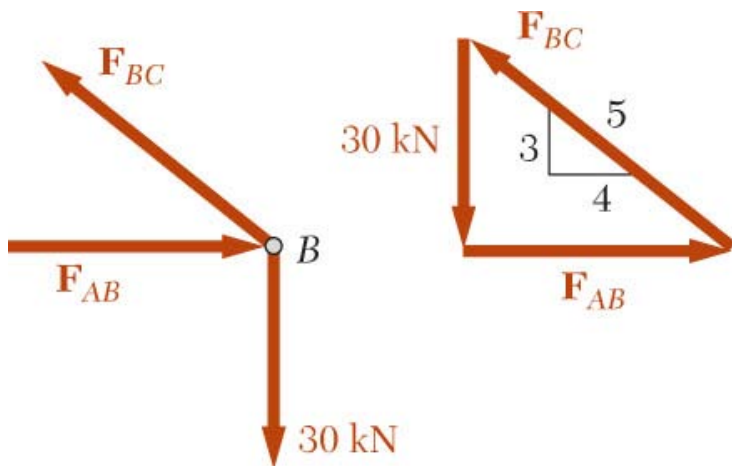


- 붐(boom)과 봉(rod)은 2력부재, 즉 부재는 부재의 끝에 단지 두 힘을 받고 있음

- 평형상태를 이루기 위해서는 힘은 반드시 힘의 작용점 사이의 축에 평행으로 크기가 같고 방향은 반대로 작용tions



- 절점(조인트)에서는 힘의 삼각형을 이루는 정적인 평형조건을 만족

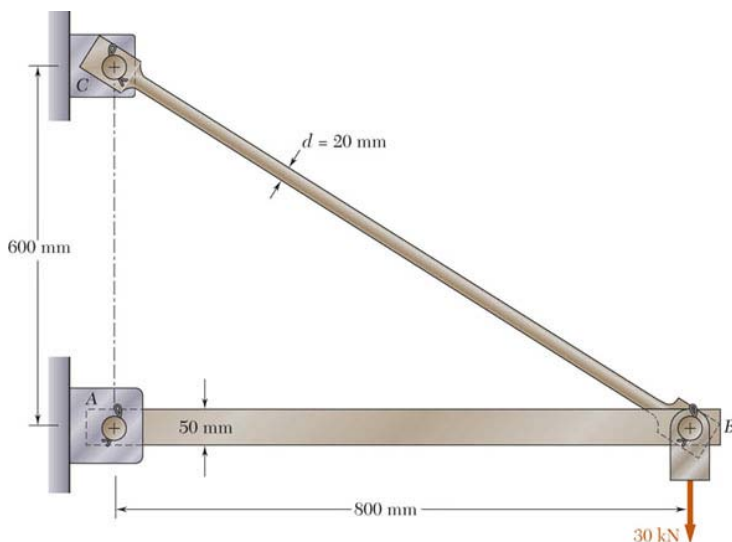


$$\sum \vec{F}_B = 0$$

$$\frac{F_{AB}}{4} = \frac{F_{BC}}{5} = \frac{30 \text{ kN}}{3}$$

$$F_{AB} = 40 \text{ kN} \quad F_{BC} = 50 \text{ kN}$$

Stress Analysis (응력해석)



구조물은 30 kN의 하중을 안전하게 지지할 수 있을까?

- 정적해석으로부터

$$F_{AB} = 40 \text{ kN (compression)}$$

$$F_{BC} = 50 \text{ kN (tension)}$$

- 부재 BC 단면에서 내력은 50 kN이며, 힘의 강도 또는 응력(stress)은

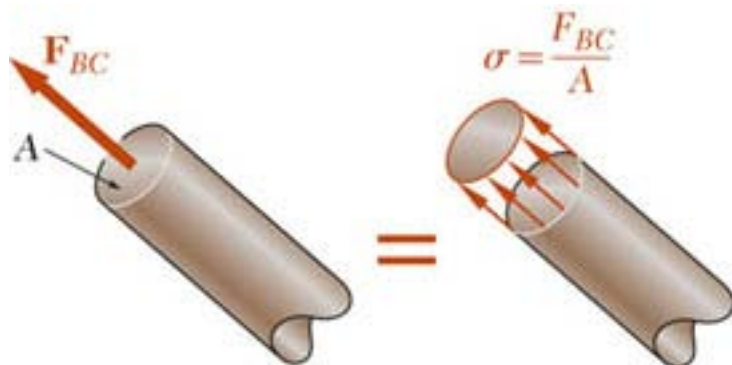
$$d_{BC} = 20 \text{ mm}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{314 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 159 \text{ MPa}$$

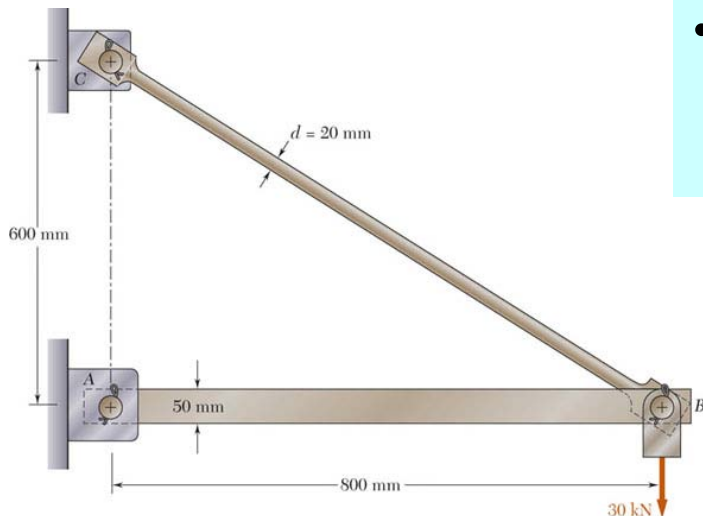
- 강재(steel)의 재료 물성으로부터 허용응력은

$$\sigma_{\text{all}} = 165 \text{ MPa}$$

- 결론: 부재 BC의 강도는 적합함



- 새로운 구조물을 설계하기 위해서는 성능을 만족시키기 위한 구성품의 치수와 적합한 재료를 선택
- 경제성, 무게, 유용성 등을 고려하여 알루미늄 봉 ($\sigma_{all} = 100 \text{ MPa}$)을 선택. 이 경우 봉의 지름은 얼마가 적합한가?



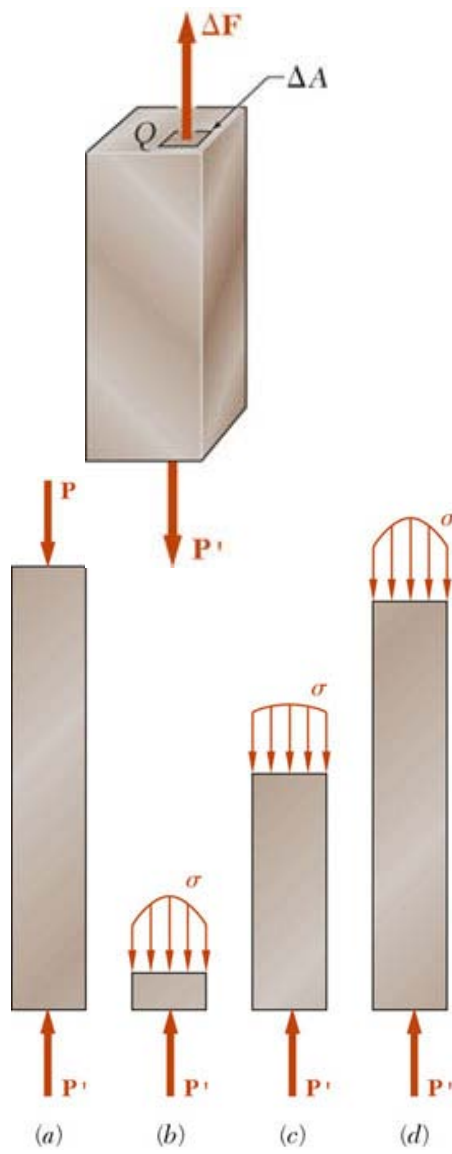
$$\sigma_{all} = \frac{P}{A} \quad A = \frac{P}{\sigma_{all}} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{100 \times 10^6 \text{ Pa}} = 500 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$A = \pi \frac{d^2}{4}$$

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4(500 \times 10^{-6} \text{ m}^2)}{\pi}} = 2.52 \times 10^{-2} \text{ m} = 25.2 \text{ mm}$$

- 지름이 26 mm 인 알루미늄봉이 적합

Axial Loading: Normal Stress (축하중: 수직응력)



- 축방향 하중을 받는 부재의 내력의 합력은 부재축을 직각으로 절단한 단면에 수직으로 작용

- 단면의 힘의 강도(force intensity)를 수직응력(normal stress)으로 정의함.

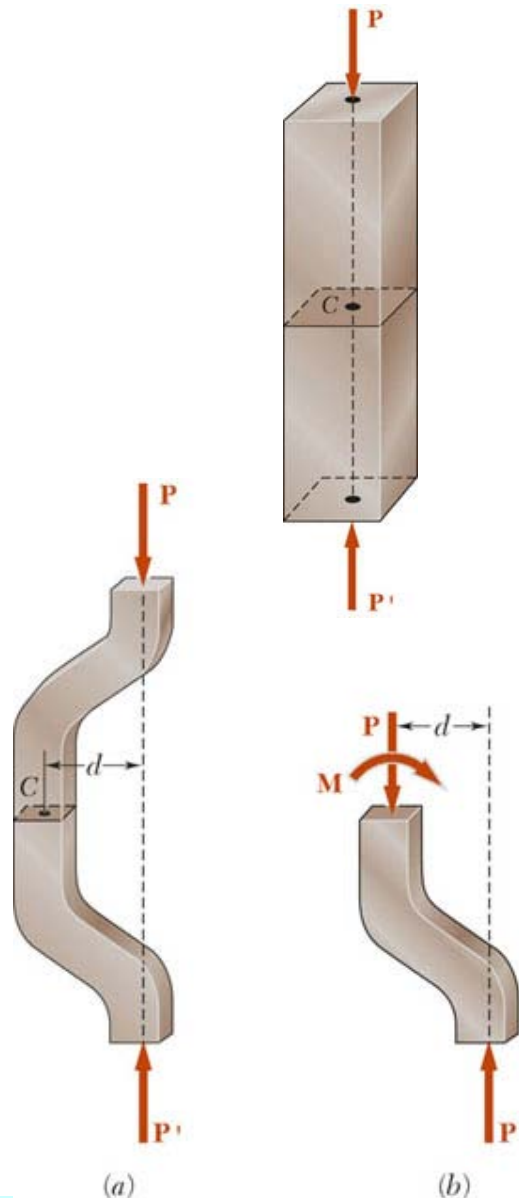
$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad \sigma_{ave} = \frac{P}{A}$$

- 특정점에 작용하는 수직응력은 평균응력과 다를 수 있으나 응력분포의 합은 다음 식을 만족

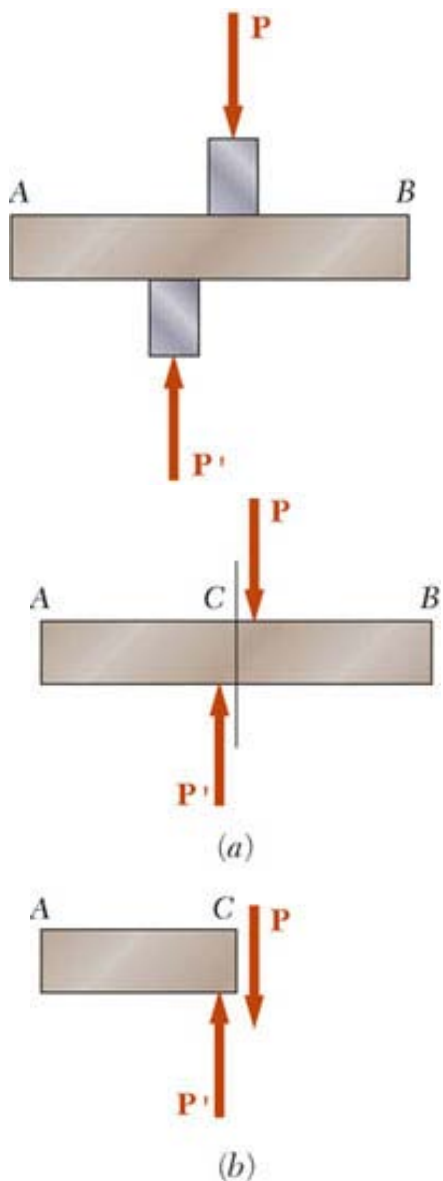
$$P = \sigma_{ave}A = \int dF = \int_A \sigma dA$$

- 세부적인 응력분포(detailed distribution of stress)는 부정정(statically indeterminate)이며, 즉 정역학적으로 결정할 수 없음

Centric & Eccentric Loading (중심하중, 편심하중)



- 균일한 응력분포는 단면의 도심(centroid)을 통과하는 내력의 합력 방향으로 작용
- 균일한 응력분포는 2력부재(two-force member)의 끝단면 집중하중이 단면 도심에 작용할 경우에 한함. 이러한 하중을 중심하중(*centric loading*)이라 함.
- 2력부재가 편심하중(*eccentrically load*)을 받을 경우, 단면의 응력분포는 축하중(axial force)과 모멘트(moment)에 의하여 결정
- 편심하중을 받는 부재의 응력분포는 균일하지도 않고 대칭도 아님



- 힘 P 와 P' 는 부재 AB 에 횡방향 (transversely)으로 작용

- 상응하는 내력은 단면 C 에 작용하며 이를 전단력 (shearing forces)이라 함.

- 단면의 전단력은 P 와 동일

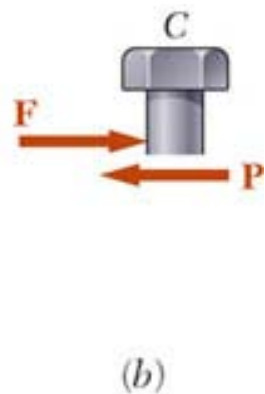
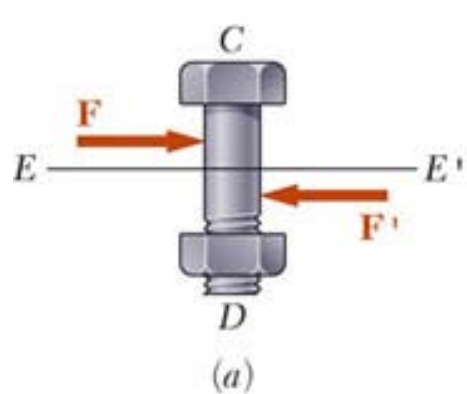
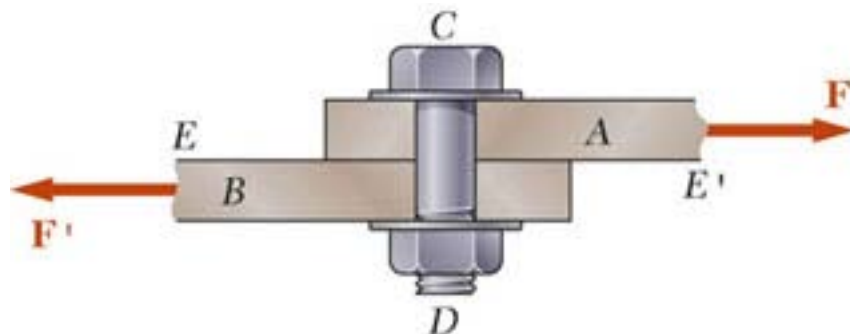
- 상응하는 평균전단응력

$$\tau_{ave} = \frac{P}{A}$$

- 전단응력은 부재의 표면에서는 영 (zero)이며, 최대값은 평균값보다 훨씬 더 큰 값이 될 수 있음.

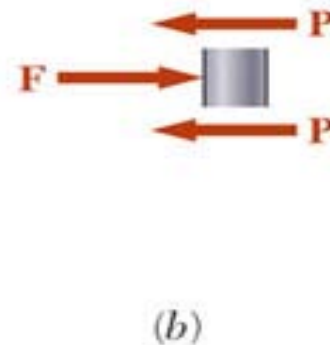
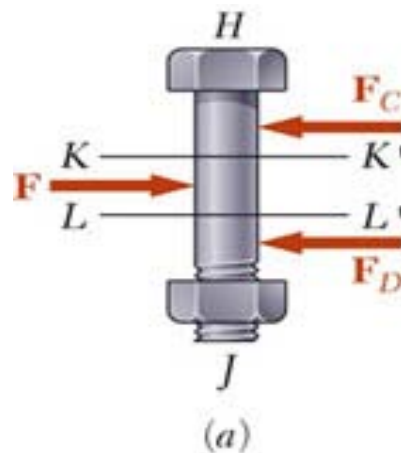
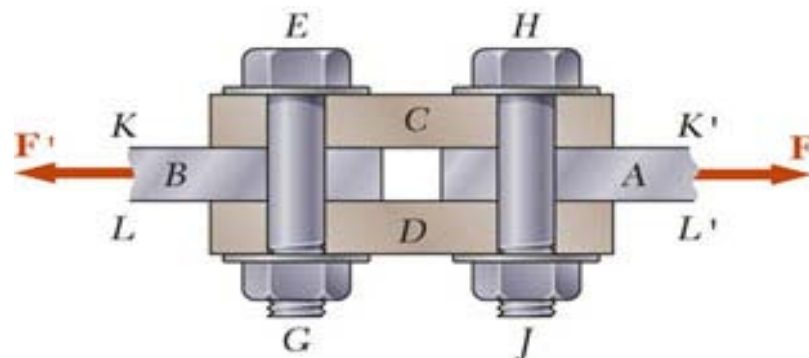
- 전단응력분포는 균일하다고 가정할 수 없음.

단일전단(Single Shear)



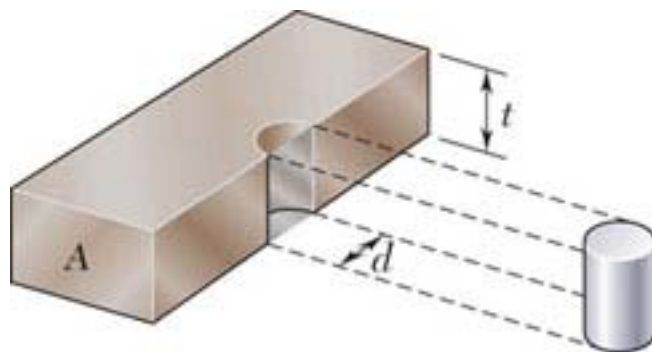
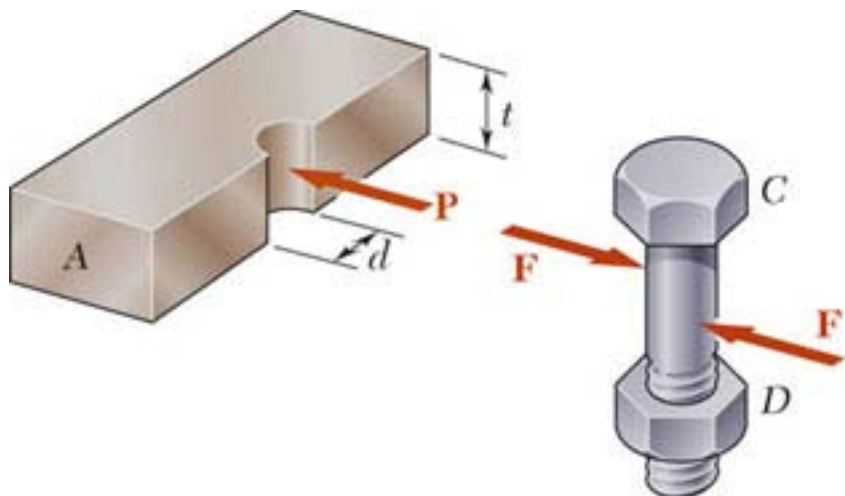
$$\tau_{\text{ave}} = \frac{P}{A} = \frac{F}{A}$$

이중전단(Double Shear)



$$\tau_{\text{ave}} = \frac{P}{A} = \frac{F}{2A}$$

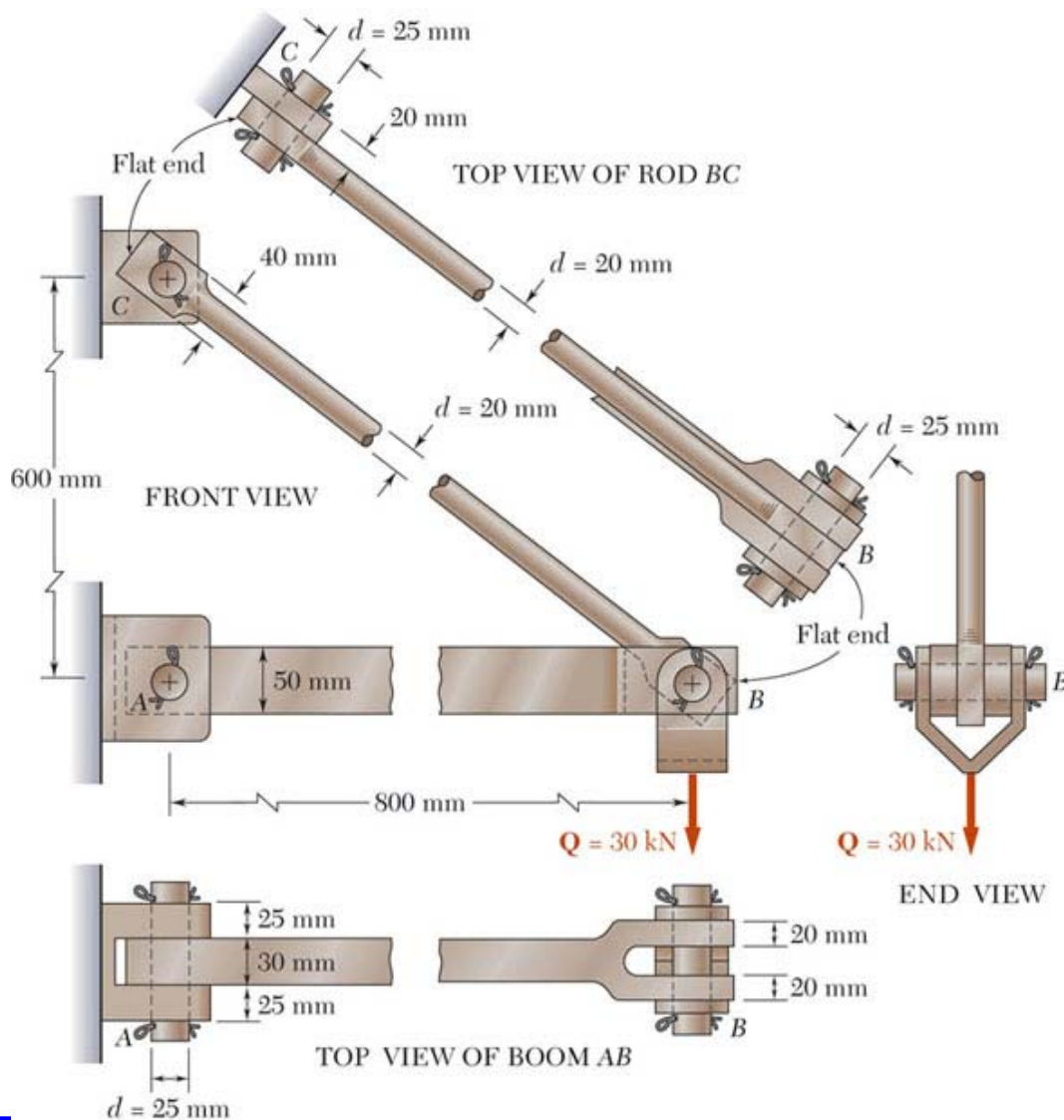
Bearing Stress in Connections (연결부의 지압응력)



- 볼트, 리벳, 그리고 핀은 접촉하는 부재의 지압면 (*bearing surfaces*) 이나 접촉점에서 응력을 발생시킴.
- 면에서 힘 분포의 합력은 핀에 가해진 힘과 크기가 같고 방향은 반대임.
- 상응하는 평균 힘의 강도 (*average force intensity*)를 지압응력(*bearing stress*)이라 함.

$$\sigma_b = \frac{P}{A} = \frac{P}{td}$$

Stress Analysis & Design Example (응력해석 및 설계예제)

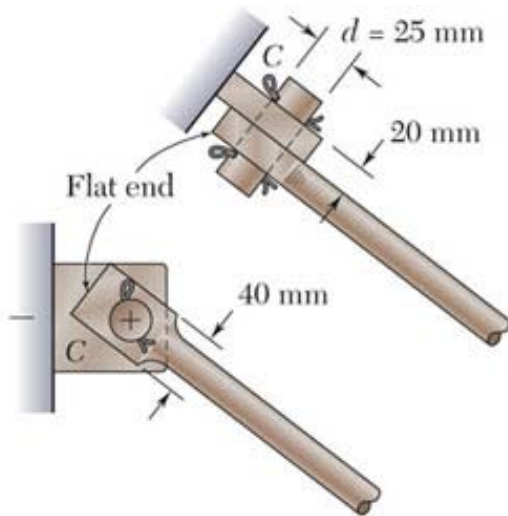


- 구조물의 부재와 연결부에서 응력을 계산

- 정적 해석으로부터
 $F_{AB} = 40\text{ kN}$ (compression)
 $F_{BC} = 50\text{ kN}$ (tension)

- AB 와 BC에서 최대 수직응력, 각 핀의 연결부에서 전단응력과 지압응력을 고려해야 함.

Rod & Boom Normal Stresses(봉과 붐의 수직응력)



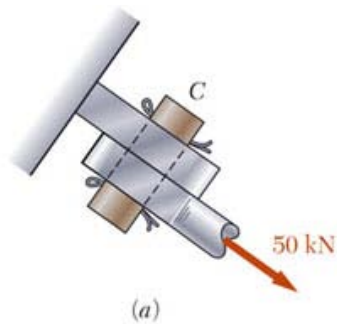
- 봉은 축방향으로 50 kN 의 인장하중을 받고 있음
- 봉 중심에서 원형단면의 ($A = 314 \times 10^{-6} \text{m}^2$) 의 평균수직응력은 $\sigma_{BC} = +159 \text{ MPa}$.
- 붐의 평탄한 끝 면에서 최소 단면적은 핀 중심 선상의 단면임.

$$A = (20 \text{ mm})(40 \text{ mm} - 25 \text{ mm}) = 300 \times 10^{-6} \text{m}^2$$

$$\sigma_{BC, \text{end}} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{300 \times 10^{-6} \text{m}^2} = 167 \text{ MPa}$$

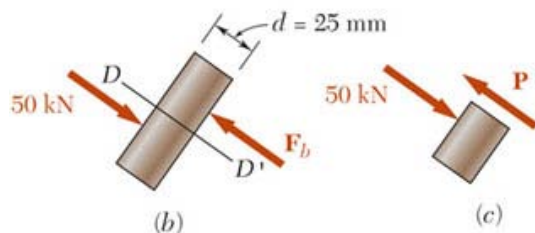
- 붐은 축방향으로 40 kN 의 압축력을 받으며, 평균 수직응력은 -26.7 MPa 임.
- 붐이 압축상태에 있으므로 붐 끝의 최소 면적부분에서는 응력을 받지 않음(unstressed)

Pin Shearing Stresses (핀의 전단응력)



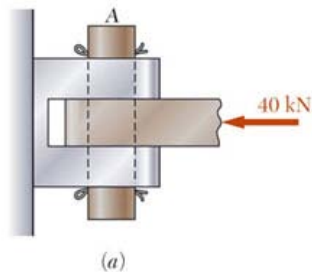
- A, B 와 C 에서 핀의 단면적

$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{25 \text{ mm}}{2} \right)^2 = 491 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

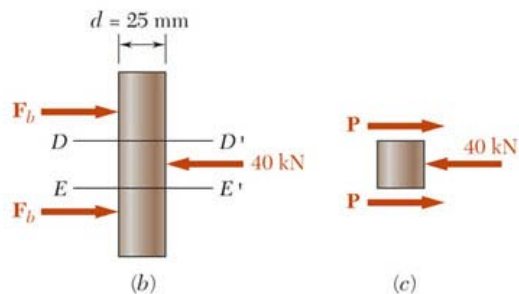


- C에서 핀의 힘은 봉 BC에 의해 가해진 힘과 동일

$$\tau_{C,ave} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 102 \text{ MPa}$$

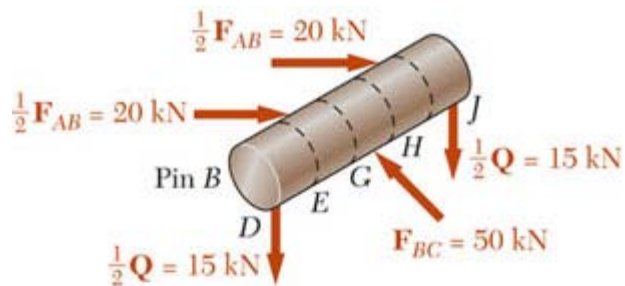


- A에서 핀은 봉 AB에 의해 가해진 힘과 동일한 힘을 받는 이중전단 (double shear) 상태임.

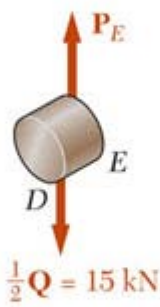


$$\tau_{A,ave} = \frac{P}{A} = \frac{20 \text{ kN}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 40.7 \text{ MPa}$$

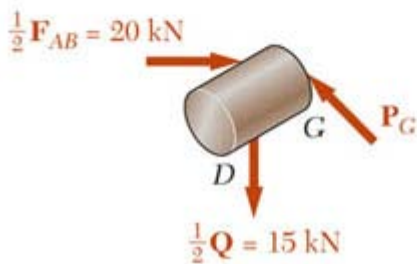
Pin Shearing Stresses (핀의 전단응력)



(a)



(b)



(c)

- B에서 핀을 가장 큰 전단력을 받는 부분을 결정하기 위해 구간을 나누어서 고려.

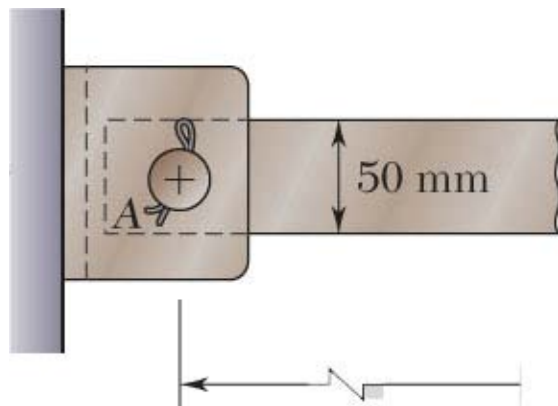
$$P_E = 15 \text{ kN}$$

$$P_G = 25 \text{ kN (largest)}$$

- 상응하는 평균 전단응력을 계산하면,

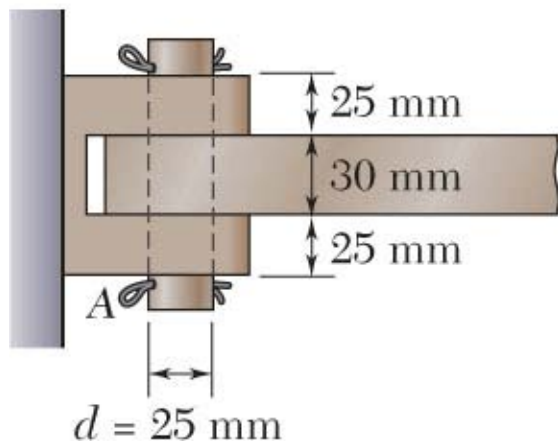
$$\tau_{B,ave} = \frac{P_G}{A} = \frac{25 \text{ kN}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 50.9 \text{ MPa}$$

Pin Bearing Stresses (핀의 지압응력)



- 볼 AB의 A에서 지압응력을 계산 ($t = 30 \text{ mm}$, $d = 25 \text{ mm}$)

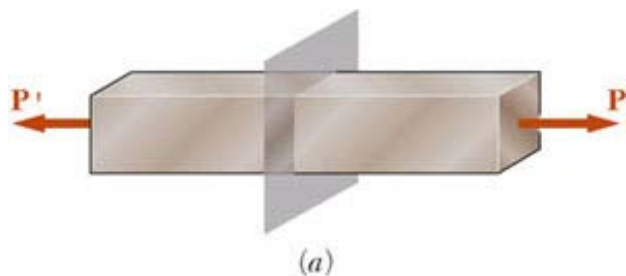
$$\sigma_b = \frac{P}{td} = \frac{40 \text{ kN}}{(30 \text{ mm})(25 \text{ mm})} = 53.3 \text{ MPa}$$



- 브래킷 A에서 지압응력 계산 ($t = 2(25 \text{ mm}) = 50 \text{ mm}$, $d = 25 \text{ mm}$)

$$\sigma_b = \frac{P}{td} = \frac{40 \text{ kN}}{(50 \text{ mm})(25 \text{ mm})} = 32.0 \text{ MPa}$$

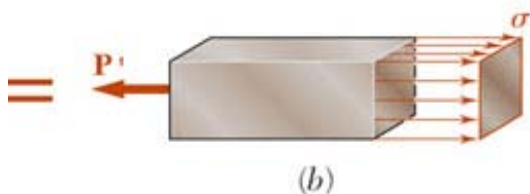
Stress in Two Force Members (2력부재의 응력)



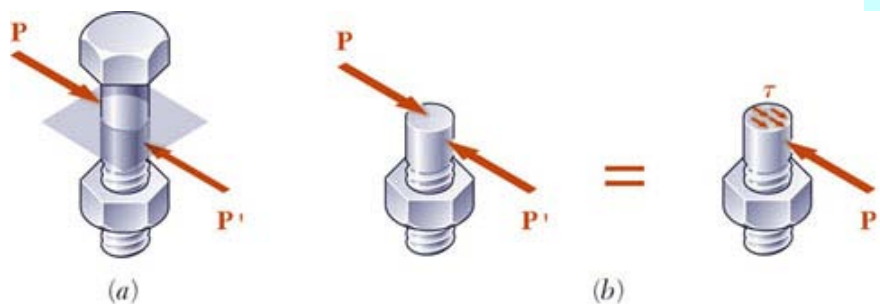
- 2력부재의 축방향 힘은 오로지 부재축의 직각인 면에 수직 응력을 발생



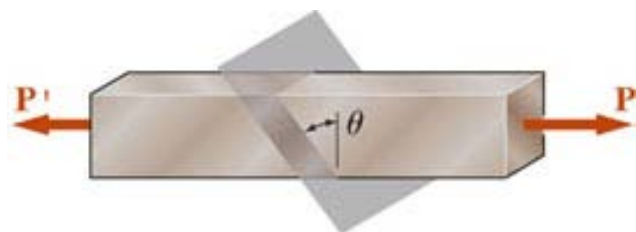
- 볼트와 핀에서 횡방향 힘 (transverse force)은 단지 볼트와 핀 축의 직각인 면에 전단을 발생



- 축방향 또는 횡방향 힘은 부재 축에 직각이 아닌 면에서는 수직응력과 전단응력을 동시에 발생 (다음 슬라이드 참고).



Stress on an Oblique Plane (경사면의 응력)



(a)



(b)



(c)



(d)

- 부재에서 수직면과 각 θ 를 이루는 면에서의 응력

- 평형조건으로부터 면에 분포된 힘 (응력)은 힘 P 와 등가를 이루어야 함.

- 힘 P 를 경사면에 수직성분과 접선성분으로 분해

$$F = P \cos \theta \quad V = P \sin \theta$$

- 경사면의 수직 및 전단응력은

$$\sigma = \frac{F}{A_\theta} = \frac{P \cos \theta}{A_0 / \cos \theta} = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta$$

$$\tau = \frac{V}{A_\theta} = \frac{P \sin \theta}{A_0 / \cos \theta} = \frac{P}{A_0} \sin \theta \cos \theta$$

Maximum Stresses



(a) Axial loading

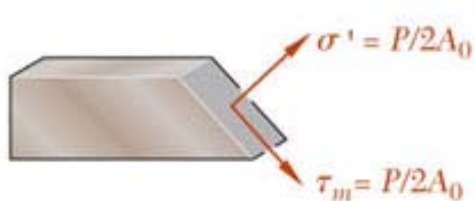
- 경사면의 수직 및 전단응력

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta \quad \tau = \frac{P}{A_0} \sin \theta \cos \theta$$



(b) Stresses for $\theta = 0$

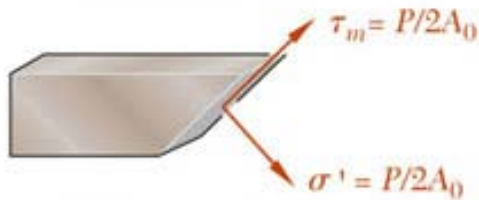
- 최대수직응력은 참조면(reference plane)이 부재 축에 직각인 경우에 발생



(c) Stresses for $\theta = 45^\circ$

$$\sigma_m = \frac{P}{A_0} \quad \tau' = 0$$

- 최대전단응력은 부재 축에 $\pm 45^\circ$ 에서 발생



(d) Stresses for $\theta = -45^\circ$

$$\tau_m = \frac{P}{A_0} \sin 45 \cos 45 = \frac{P}{2A_0} = \sigma'$$

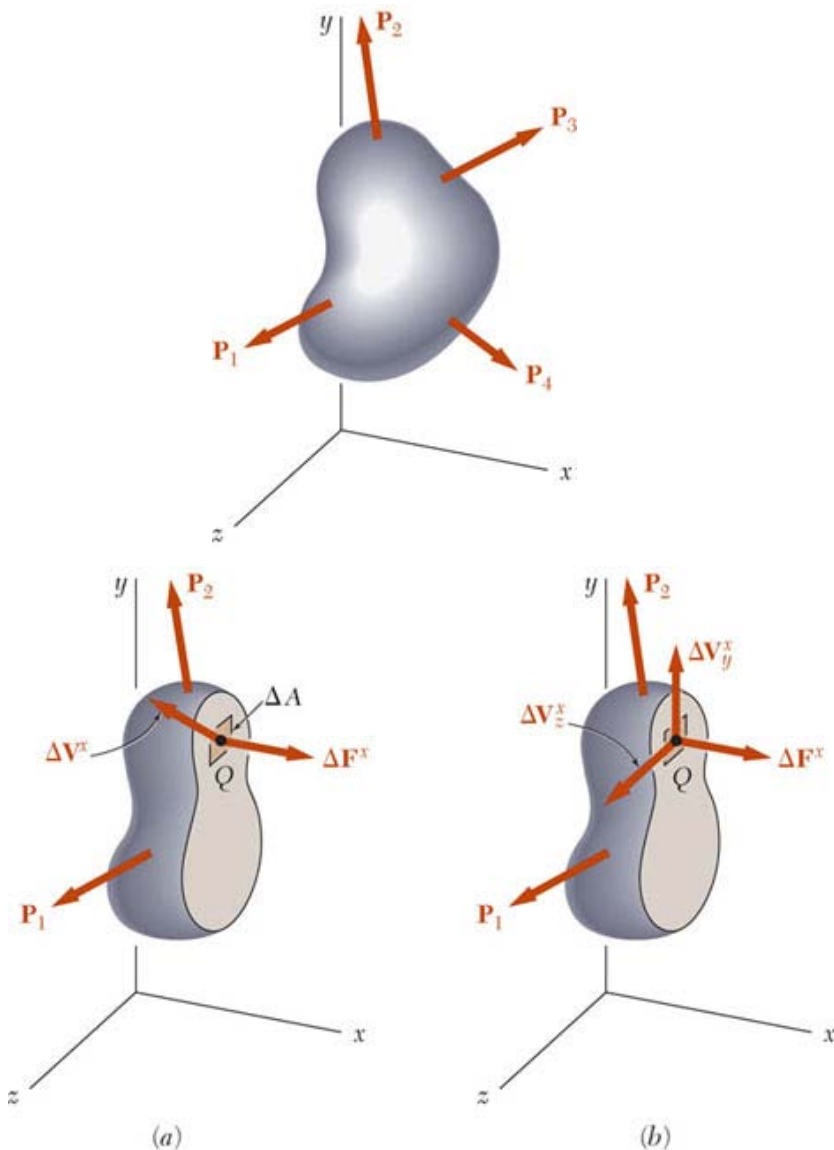
Stress Under General Loadings (일반 하중에서 응력)

- 여러 하중을 받는 부재의 경우 Q를 지나는 두 부분으로 절단하여 고려
- 내부의 응력분포는 다음 식으로 정의

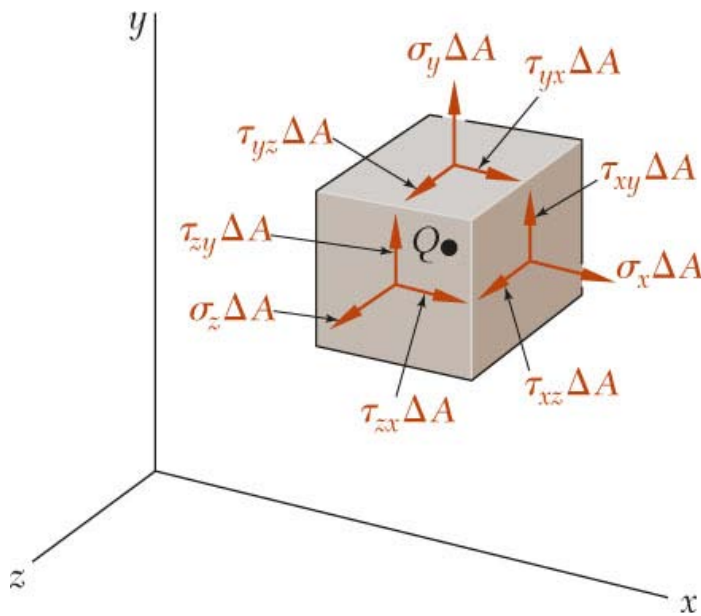
$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F^x}{\Delta A}$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_y^x}{\Delta A} \quad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_z^x}{\Delta A}$$

- 평형을 이루기 위해서는 크기가 같고 방향이 서로 반대인 힘과 응력이 부재의 서로 다른 부분에 작용되어야 함.



State of Stress



- 응력성분은 x, y, z 축에 평행으로 절단된 면에 규정. 평형을 이루기 위해서 보이지 않은 면에서는 크기가 같고 반대방향의 응력이 작용되어야 함.

- 응력에 의한 힘은 평형을 이루기 위해 다음 조건을 만족해야 함.

$$\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = \sum M_y = \sum M_z = 0$$

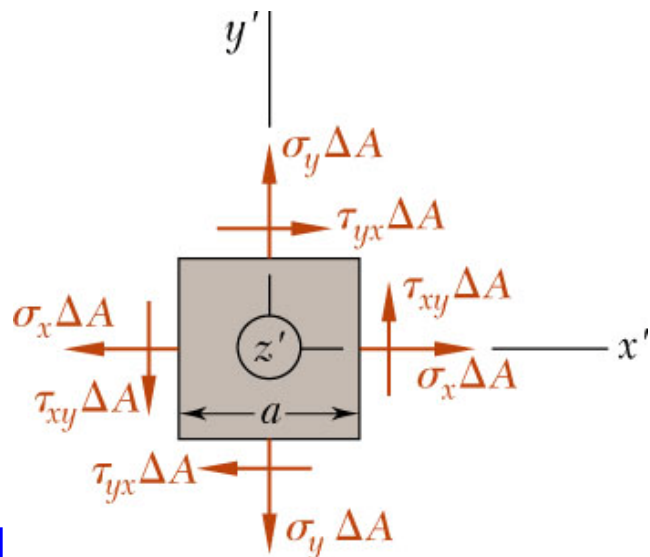
- z 축에 대한 모멘트를 고려하면,

$$\sum M_z = 0 = (\tau_{xy}\Delta A)a - (\tau_{yx}\Delta A)a$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\text{similarly, } \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \text{and} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

- 전체의 응력상태(complete state of stress)는 6개의 응력성분을 필요로 함.



Factor of Safety (안전계수)

구조물의 부재나 기계부품은 재료의 극한강도 (ultimate strength) 보다 적은 사용하중 (working stress) 이 되도록 설계

FS = Factor of safety

$$FS = \frac{\sigma_u}{\sigma_{all}} = \frac{\text{ultimate stress}}{\text{allowable stress}}$$

안전계수의 선정:

- 부재의 특성이 변할 가능성
- 하중의 불확실성
- 해석의 불확실성
- 하중사이클 횟수
- 파손 형태
- 유지관리 및 발생할 수 있는 열화(deterioration effects)
- 전체 구조물의 건전성에서 주어진 부재가 차지하는 중요도
- 수명 및 특성 위험(risk to life and property)
- 기계기능의 영향(influence on machine function)